De Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Via twee voorrondes kwamen dit jaar 143 van de bijna 7500 deelnemers in de finale terecht, waarin ze op 13 september 2013 op de TU Eindhoven in drie uur vijf lastige opgaven moesten oplossen. Bob Zwetsloot, die als derde van de vijfdeklassers is geëindigd, beschrijft twee oplossingen van opgave 4 van deze finale.

■ door Bob Zwetsloot

PRODUCTEN VAN DELERS

In opgave 4 van de NWO-finale 2013 staan positieve delers van een getal centraal. Een deler van n is een getal waardoor n deelbaar is, zonder rest. Zo zijn de getallen 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 en –6 alle delers van 6. In opgave 4 gaat het alleen om de positieve delers: 1, 2, 3 en 6. De toevoeging 'positief' laten we vanaf nu weg. Als we het over delers hebben, bedoelen we positieve delers.

In de opgave wordt de functie $P(n)$ gedefinieerd als het product van alle delers van n. In ons voorbeeld met $n = 6$ is dus $P(6) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$. Nog een voorbeeld, met $n = 20$: de delers zijn 1, 2, 4, 5, 10 en 20, dus $P(20) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = 8000$.

In het algemeen geldt: als $d_1, d_2, \ldots, d_k$ de delers van n zijn, dan is $P(n) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$. We kunnen hier meteen een belangrijke eigenschap van $P(n)$ uit afleiden: als $P(n) = d_1 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$ deelbaar is door een bepaald priemgetal p, dan moet minstens één van de d_i's deelbaar zijn door p, en aangezien de d_i's allemaal delers zijn van n, is p dan ook een deler van n. Dus elke priemdeler van $P(n)$ is ook een priemdeler van n.

We kijken nu naar wat er eigenlijk wordt gevraagd in de opgave. Dat zijn twee dingen:

a. Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n$.

b. Laat zien dat er geen positieve gehele getallen n bestaan waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

Ook hier zullen we de toevoegingen 'positief' en 'geheel' weglaten; vanaf nu nemen we aan dat n dat is.

We bekijken twee bewijzen voor deze opgave: eerst richten we ons specifiek op deze twee deelopgaven, daarna kijken we wat algemener naar $P(n)$ en zoeken we naar een methode waarmee we ook andere eigenschappen van $P(n)$ kunnen ontrafelen.

DE SPECIFIEKE METHODE In vraag a zoeken we alle getallen n met $P(n) = 15n$. Aangezien $P(n)$ nu deelbaar is door $15 = 3 \cdot 5$, is $P(n)$ ook deelbaar door de priemgetallen 3 en 5. Zoals we net al hebben gezien, moet n dan ook deelbaar zijn door 3 en 5. Daarmee is n ook deelbaar door $3 \cdot 5 = 15$. Als $n > 15$, dan zijn in elk geval 3, 5, 15 en n delers van n, dus dat zijn allemaal verschillende factoren van $P(n)$. Dus dan is $P(n)$ minstens $3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot n = 225n > 15n$. Dat kan dus niet en we concluderen dat de getallen $n > 15$ niet voldoen. En wat als $n = 15$? Dan is $P(15) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 15 \cdot 15$, dus $n = 15$ voldoet. Daarmee hebben we bewezen dat $n = 15$ het enige getal is waarvoor $P(n) = 15n$.

Dan nu vraag b. We moeten bewijzen dat er geen getallen n bestaan met $P(n) = 15n^2$. Stel nu eens dat er wél een n is waarvoor $P(n) = 15n^2$. Net als bij vraag a moet n dan deelbaar zijn door 15. We hebben gezien dat $P(15) = 15 \cdot 15 \neq 15 \cdot 15^2$, dus 15 voldoet niet. Dus $n \geq 30$. Dan moet gelden $\frac{n}{5} \geq \frac{30}{5} = 6 > 5$, oftewel $\frac{n}{5} > 5$. Dus dan zijn $1 < 3 < 5 < \frac{n}{5} < \frac{n}{3} < n$ zes verschillende delers van n, en daarmee ook zes factoren in $P(n)$. Dus $P(n) \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{n}{5} \cdot \frac{n}{3} \cdot n = n^3$. Aangezien $n \geq 30 > 15$, geldt dan $P(n) \geq n^3 = n \cdot n^2 > 15 \cdot n^2$, en dat is een tegenspraak. Dus er is géén n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

DE ALGEMENE METHODE Om een beter idee te krijgen van de eigenschappen van de functie $P(n)$, vullen we eerst maar eens een aantal kleine getallen voor n in, bijvoorbeeld:

- $P(5) = 1 \cdot 5 = 5 = 5^1$;
- $P(8) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 = 8^2$;
- $P(10) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 = 10^2$;

• $P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728 = 12^3$.
Het lijkt erop dat $P(n)$ altijd een macht van n is. Die conclusie is echter iets te overhaast getrokken, want $P(9) = 1 \cdot 3 \cdot 9 = 27$, en dat is geen macht van 9. Maar we zijn hier wel iets op het spoor.

Als voor een zeker (positief, geheel) getal d geldt dat d een deler is van n, dan geldt daardoor automatisch ook dat $\frac{n}{d}$ een deler is van n, want $\frac{n}{d} \cdot d = n$. Dus als $d \neq \frac{n}{d}$, dan zijn $\frac{n}{d}$ en d twee verschillende delers van n met product n. In dat geval noemen we d en $\frac{n}{d}$ een *delerpaar*. Dus zolang $d \neq \frac{n}{d}$ voor alle delers d van n, zit elke deler d van n in een delerpaar. Dit gaat alleen mis als er een d bestaat met $d = \frac{n}{d}$; dan geldt $d^2 = n$, oftewel $d = \sqrt{n}$. Dus alle delers van n zitten in een delerpaar, behalve $\sqrt{n}$, als dat een deler van n is. En $\sqrt{n}$ is alleen een deler van n als n een kwadraat is.

Hiermee kunnen we $P(n)$ omschrijven. Voor elk getal n dat geen kwadraat is, bestaat $P(n)$ uit het product van allemaal verschillende delerparen. Elk delerpaar heeft product n, dus het product van al die delerparen is een macht van n. Dus geldt $P(n) = n^a$ voor een zekere waarde van a (wederom: positief, geheel). Voor alle kwadraten n geldt $P(n) = \sqrt{n} \cdot n^a$, doordat elke deler behalve $\sqrt{n}$ in een delerpaar met product n zit, en $\sqrt{n}$ overblijft. Als we beide gevallen kwadrateren, dan zien we dat $P(n)^2 = n^{2a}$ als n geen kwadraat is en $P(n)^2 = n^{2a+1}$ als n wel een kwadraat is. Dus eigenlijk geldt $P(n)^2 = n^b$ met b een positief geheel getal, want uit de vorige twee vergelijkingen kunnen we opmaken dat $P(n)^2$ ofwel een even macht ofwel een oneven macht van n is, maar in ieder geval een gehele macht van n is.

Terug naar de opgave. In de vraag ging het om alle getallen n met $P(n) = 15n$. We hebben net gezien dat voor die getallen n geldt dat $P(n)^2 = n^b$ voor een zekere b. Als we $P(n) = 15n$ kwadrateren, vinden we $P(n)^2 = 225n^2$. Dus $n^b = P(n)^2 = 225n^2$. Als we beide kanten van de vergelijking delen door n^2 (dit mag, omdat $n \neq 0$) geldt $n^{b-2} = 225$. Het getal 225 is alleen een eerstemacht (225^1) en een kwadraat (15^2), maar geen hogere macht, dus de enige oplossingen zijn $(n, b) = (225, 3)$ en $(n, b) = (15, 4)$.

We mogen nu niet direct concluderen dat $n = 15$ en $n = 225$ allebei voldoen. Weliswaar is $P(n)^2$ in beide gevallen een macht van n, maar we weten niet zeker of daar ook de juiste exponent b bij hoort. Dus we berekenen $P(15)$ en $P(225)$ en kijken of ze voldoen. Voor $n = 15$ geldt $P(15) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 15 \cdot 15$, dus $n = 15$ voldoet. Voor $n = 225$ geldt $P(225) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 45 \cdot 75 \cdot 225 = 15 \cdot 225^4 \neq 15 \cdot 225$, dus $n = 225$ voldoet niet. Aangezien we alle andere gevallen al hadden uitgesloten, is $n = 15$ de enige oplossing.

Tot slot vraag b. Waarom is er geen n met $P(n) = 15n^2$? We maken weer vergelijkingen, zoals net. Na kwadrateren van $P(n) = 15n^2$ krijgen we $P(n)^2 = 225n^4$. Er geldt nog steeds $P(n)^2 = n^b$, dus $n^b = P(n)^2 = 225n^4$. Deel beide kanten door n^4, dat geeft $n^{b-4} = 225$. We weten nog dat 225 alleen een eerstemacht en een kwadraat is, dus zijn de enige twee oplossingen $(n, b) = (225, 5)$ en $(n, b) = (15, 6)$. Nu hoeven we alleen nog $n = 15$ en $n = 225$ te controleren. Voor $n = 15$ geldt $P(15) = 15 \cdot 15 \neq 15 \cdot 15^2$, dus $n = 15$ voldoet niet, en voor $n = 225$ geldt $P(225) = 15 \cdot 225^4 \neq 15 \cdot 225^2$, dus ook $n = 225$ voldoet niet. Er is dus geen enkele n waarvoor $P(n) = 15n^2$. ■